数理解析研究所講究録
第 754 巻 1991 年 220-227

1つの変数に関して低次の交線をもつ代数曲面のアレンジメントについて

津田塾大学数学科　　今井桂子 (Keiko Imai)
東京大学理学部情報科学科　　今井 浩 (Hiroshi Imai)

1. はじめに

計算幾何学においては，平面上に与えられた直線の集合や，その高次元への拡張である超平面の集合を対象物として扱う問題が数多く存在する．このような幾何的集合を計算機で扱うために，アレンジメントという概念が用いられている．本稿では，対象物が直線や超平面より複雑であると考えられる曲線や曲面のアレンジメントについて考察する．

与えられた直線や平面などによって，平面や高次元空間が分割されるが，アレンジメントとは，その分割を構成する点，線分，面など分割の構成要素（フェイスという）の接続関係や，それらのフェイスが，最初に与えられた直線や平面のどれに含まれているか等の情報を表わすものである．このような，平面や空間の分割を考える際，最初に考慮しなければならないのは，分割の組合せ的複雑度，つまり，フェイスの総数である．平面上の直線の集合に対するアレンジメントについては，すでに詳しく調べられている（[4] などを参照）．平面上の直線分や Jordan 曲線などについても，いくつかの結果が得られている．本稿では，平面上のアレンジメントに対しては，Jordan 曲線の議論が本質的に平面上の代数曲線に対して当てはまることを示す．また，3 次元 Euclid 空間の代数曲面のアレンジメントについても考察を行う．平面上のアレンジメントでは曲線について考察され始め，いくつかの結果が得られているのに対して，高次元のアレンジメントは，まだ，その対象は超平面が主流でそれ以外は特殊なものに対して議論されているだけである．そこで本稿では，少し一般的な $z=g_i(x,y)$ $(i=1,\cdots,n)$ で記述されるような代数曲面について議論する．但し，2 つの代数曲面の交線として得られる曲線は y について 3 次とするなどの条件が必要である．

2. 超平面のアレンジメント

この節では，平面上の直線の場合も含めて，超平面のアレンジメントについて，これまでの研究で知られている結果を述べておく．結果の要約に入る前に準備として，アレンジメントを議論する際に使用する用語をいくつか定義する（ここでは，超平面の集合に対して定義するが，曲線や曲面に対しても同様に定義できる）．

最初に d 次元 Euclid 空間 $\mathbf{E}^d$ 内の超平面（$d=2$ の場合は直線）のアレンジメントを考える． $\mathbf{E}^d$ 内の n 個の超平面の集合を H で表わし，この H によって $\mathbf{E}^d$ は，いろいろな次元のフェイスに分割される．これらのフェイスの集合とその接続関係，各フェイスに対しそれを含む超平面の情報をあわせたものを H のアレンジメントといい $\mathcal{A}(H)$ と書くことにする．フェイスの次元を明記したいときは， k $(0\le k\le d)$ 次元のフェイスを k-フェイスと書く． 0-フェイスを頂点， 1-フェイスを辺， $(d-1)$-フェイスをファ

セット， d-フェイスをセルとも呼ぶ．また， $\mathbf{E}^d$ 内の d 個の超平面は1点で交わり， $d+1$ 個の超平面は共通点を持たないとき， $\mathcal{A}(H)$ は単純であるという．

$\mathbf{E}^d$ 内の n 個の超平面の集合 H に対して次の定理が成り立つ．

定理 1 ([4]) $\mathcal{A}(H)$ 内の k-フェイスの数は，高々

$$f_k^{(d)}(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} \binom{n}{d-i}$$

であり， $\mathcal{A}(H)$ が単純であるときは k-フェイスの数は丁度 $f_k^{(d)}(n)$ に等しくなる． □

Euclid 平面（ $d=2$ ）の場合は，

$$f_0^{(2)}(n) = \binom{n}{2}, \quad f_1^{(2)}(n) = 2\binom{n}{2} + n, \quad f_2^{(2)}(n) = \binom{n}{2} + n + 1$$

となる． $f_k^{(d)}(n)$ を簡単に表わすと，次のようになる．

$$f_k^{(d)}(n) = \Theta(n^d)$$

超平面のアレンジメントの場合には，もうひとつ重要な定理（“ゾーン定理”と呼ばれる）が得られている．ゾーンとは，超平面の集合 H に対し， H に含まれない超平面 h を加えたとき， h と交わる $\mathcal{A}(H)$ のセルを取り囲んでいるファセットの集合をいう．

定理 2（超平面のゾーン定理） $\mathcal{A}(H)$ に対し， h のゾーンに含まれるファセットの数は， $O(n^{d-1})$ である． □

定理1がアレンジメント全体の組合せ的複雑度について述べているのに対し，ゾーン定理は，ある1つの超平面が他の超平面とどのように交わっているかについて述べている． $d=2$ の場合， n 本の直線によってできる辺は $O(n^2)$ あるが，そのうち，1つの直線と交わる面を取り囲んでいる辺の総和は， $O(n)$ しかないことをゾーン定理は示している．

ゾーン定理は，アレンジメントを構成する逐次添加法を用いたアルゴリズムを解析するためにも重要な定理である．（ゾーン定理について詳しくは，[3,4,6] などを参照のこと．）

3. 平面上の曲線のアレンジメント

この節では，Jordan 曲線のアレンジメントの [5] における結果を述べて，それが代数曲線の場合に適用できることを示す．

[5] では， n 個の Jordan 閉曲線または有界でない Jordan 曲線からなる集合 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ のアレンジメント $\mathcal{A}(\Gamma)$ を求めている． $\mathcal{A}(\Gamma)$ は単純であるとし， Γ 内の2つの曲線は高々 s 回交わるとする． Γ に同様の条件を満たす曲線 γ を付け加えたとき，次の Jordan 曲線に対するゾーン定理が成り立つ [5]．

定理 3 (Jordan 曲線のゾーン定理) $\mathcal{A}(\Gamma)$ に対し， γ のゾーンに含まれる辺の数は， $O(\lambda_{s+2}(n))$ である． □

ここで， $\lambda_s(n)$ は， (n,s) - 次の Davenport-Schinzel 列の最大長を表わし， $s \geq 3$ のとき n に関して殆ど線形に近い関数である．（ $s=1$ ， 2 に対しては線形関数である．Davenport-Schinzel 列については [1,2,10] などを参照．）また，[5] では，このゾーン定理をもとに，Jordan 曲線のアレンジメントを構成する逐次添加法による $O(n\lambda_{s+2}(n))$ のアルゴリズムを示している．ゾーン定理を証明するために，まず，任意の 2 つが高々 s 点で交わるような m 個の Jordan 弧の集合 $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$ に対し， $\mathcal{A}(\Delta)$ の 1 つのセルを囲んでいる辺の数を評価し，次の定理を得ている． $\mathcal{A}(\Delta)$ は単純であると仮定する．

定理 4 ([8]) $\mathcal{A}(\Delta)$ の 1 つのセルを囲む辺の数は， $O(\lambda_{s+2}(m))$ である． □

これらの Jordan 曲線のアレンジメントに対する議論が，平面代数曲線に対しても成り立つことを示そう． n 個の平面代数曲線の集合 $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \cdots, \widetilde{\gamma}_n\}$ を考える．ここでも，各代数曲線 $\widetilde{\gamma}_i$ は，次数が高々 d である多項式 $p_i(x,y)=0$ で定義されているとし， $\mathcal{A}(\widetilde{\Gamma})$ は単純であると仮定する．各曲線 $p_i(x,y)=0$ は，高々 $d(d-1)+1$ 個の x 方向に単調な Jordan 弧に分解できる．これらのことから，定理 4 から定理 3 を導いたのとほとんど同様にして，平面代数曲線のゾーン定理が導ける．

定理 3' （平面代数曲線のゾーン定理） $\mathcal{A}(\widetilde{\Gamma})$ に 1 つの曲線を加えたとき，その曲線が横切るセルを囲む辺の総数は， d を定数とみなせば， $O(\lambda_{d^2+2}(n))$ である． □

4. 3 次元 Euclid 空間内の代数曲面のアレンジメント

平面上のアレンジメントと比較して，高次元の Euclid 空間内のアレンジメントは，組合せ的に複雑になり，扱いにくい．しかし，グラフィックスやモーションプラニングなどの分野における応用を考える場合には，問題の対象となる物体が高次元であるので，どうしても高次元空間内のアレンジメントを考える必要に迫られる．また，そのような応用においては，超平面ではなく，超曲面のアレンジメントを求めたい場合も多い．超平面の場合には，一般の d 次元空間内のアレンジメントに対する結果がある程度得られていたが，超曲面に対しては，まだあまり知られていない．ここでは，3 次元 Euclid 空間内の代数曲面のアレンジメントに限って議論を進める．

いくつかの関数の最小値を取る関数を求めることは，いろいろな場面で起こる問題の 1 つである．今考えているアレンジメントを構成している代数曲面の下側エンベロープの組合せ的複雑度は，アレンジメント内の 1 つのセルに接続する辺の数を評価することに他ならない．平面上の Jordan 曲線のアレンジメントを求める際に，1 つのセルに接続する辺の数を評価し，それをもとにゾーン定理を導いた．そこで 3 次元 Euclid 空間内の代数曲面のアレンジメントを求めるために，まず，与えられた n 個の代数曲面の下側エンベロープの組合せ的複雑度を調べ，1 つのセルを取り囲んでいるファセットの数を評価する．

1 変数関数の場合には，下側エンベロープを求める問題は，Davenport-Schinzel 列の理論として様々な結果が得られている．しかし，2 変数関数の下側エンベロープを求める問題に

対しては，一般的な解法がまだ得られていない．個々の問題に対する解法に用いられる手法は，1変数関数の問題に帰着して，Davenport-Schinzel 列の研究の結果を用いて解くというものである．[7] で用いられている方法も，そのような手法であり，次のような結果が得られている．

[7] では，次のような条件を満たす n 個の関数の集合 $F = \{f_1(x,y), \cdots, f_n(x,y)\}$ に対する下側エンベロープの組合せ的複雑度 $\kappa(F)$ を評価している．

(a) $i \neq j$ と x_0 に対し，$f_i(x_0,y) = f_j(x_0,y)$ は高々 2 つの根 $r_{ij}^- \leq r_{ij}^+$ をもつ．

(b) r_{ij}^-，r_{ij}^+ の特異点は高々 t 個である．

(c) F の任意の 4 つの関数は共通点を持たない．また，異なる 3 つの関数 f_i，f_j，f_k に対して，$f_i(x,y) = f_j(x,y) = f_k(x,y)$ は高々 s 個の根を持つ．

ここで，t と s は n に無関係な定数である．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 5 ([7]) 上の仮定のもとで，$\kappa(F)$ は $O(n\lambda_{s+2}(n))$ である． □

本稿では，関数の集合 F のかわりに次のような性質を持つ代数曲面の集合 G を考える．G に含まれる曲面は，高々 d 次多項式 $z = g_i(x,y)$ $(i = 1, \cdots, n)$ で与えられるとする．この曲面の定義式を与える 2 変数関数 $g_i(x,y)$ と曲面を同一視して，$G = \{g_1(x,y), \cdots, g_n(x,y)\}$ とみなす．このとき，$g_i(x,y) \in G$ $(i = 1, \cdots, n)$ は，次の条件を満たすとする．さらに，議論を簡単にするために，2 つの曲面の交線上の点における接平面は異なるとする．

(a') $i \neq j$ と x_0 に対し，$g_i(x_0,y) = g_j(x_0,y)$ は y に関する次数が高々 3 次であり，従って高々 3 つの根 $r_{ij}^{min}(x_0) \leq r_{ij}^{med}(x_0) \leq r_{ij}^{max}(x_0)$ を持つ．（$r_{ij}^{min}(x_0) = r_{ji}^{min}(x_0)$，$r_{ij}^{med}(x_0) = r_{ji}^{med}(x_0)$，$r_{ij}^{max}(x_0) = r_{ji}^{max}(x_0)$ である．）

(c') G の任意の 4 つの関数は共通点を持たない．

集合 F に対する条件に比べて，条件が減っている．その理由は，$g_i(x,y)$ が d 次多項式であることから，他の条件が導けることにある．一般に，d 次既約多項式 $g(x,y)$ を考えると，平面代数曲線 $g(x,y) = 0$ に対して，次の補題が成り立つ．

補題 1 $g(x,y) = 0$ の特異点は高々 $d(d-1)/2$ であり，このような 2 つの平面代数曲線の交点は高々 d^2 である． □

$r_{ij}^{min}(x_0)$，$r_{ij}^{med}(x_0)$，$r_{ij}^{max}(x_0)$ を x_0 の関数 $y = r_{ij}^{min}(x_0)$，$y = r_{ij}^{med}(x_0)$，$y = r_{ij}^{min}(x_0)$ とみなすと，この補題から条件 (b) に対応する

(b') $r_{ij}^{min}(x_0)$，$r_{ij}^{med}(x_0)$，$r_{ij}^{max}(x_0)$ の特異点は高々 $d(d-1)/2$ である．

が導かれ，また，条件 (c) の後半部分についても，(c') が成り立てば，任意の 3 つの関数は孤立点で交わり，それらの点は，2 つの平面曲線の交点であるから，その数は高々 d^2 であることがわかる．これらの条件を満たす n 個の代数曲面の集合 G の下側エンベロープの組合せ複雑度 $\kappa(G)$ に対して，次の定理が成り立つ．

定理 6 上の条件を満たす代数曲面の集合 G に対し，$\kappa(G)$ は $O(n\lambda_{d^2+2}(n))$ である．

証明： $g_i(x_0, y) = g_j(x_0, y)$ の 3 つの根 $r_{ij}^{min}(x_0)$，$r_{ij}^{med}(x_0)$，$r_{ij}^{max}(x_0)$ を用いて次のような関数を定義する．

$y > r_{ij}^{max}(x_0)$ なる y に対して $g_i(x_0, y) > g_j(x_0, y)$ ならば，

$$\varphi_{ij}^{max}(x_0) = r_{ij}^{max}(x_0),$$

$g_i(x_0, y) < g_j(x_0, y)$ ならば，

$$\varphi_{ji}^{max}(x_0) = r_{ij}^{max}(x_0),$$

とおき，$y < r_{ij}^{min}(x_0)$ となる y に対して $g_i(x_0, y) < g_j(x_0, y)$ ならば，

$$\varphi_{ij}^{min}(x_0) = r_{ij}^{min}(x_0),$$

$g_i(x_0, y) > g_j(x_0, y)$ ならば，

$$\varphi_{ji}^{min}(x_0) = r_{ij}^{min}(x_0),$$

と定義する．3 つの根が異なるときは，$r_{ij}^{med}(x_0)$ も定義されるが，これに対しては，十分小さな $\epsilon > 0$ に対して，$y = r_{ij}^{med}(x_0) + \epsilon$ となる y において，$g_i(x_0, y) > g_j(x_0, y)$ ならば，

$$\varphi_{ij}^{med}(x_0) = r_{ij}^{med}(x_0),$$

$g_i(x_0, y) < g_j(x_0, y)$ ならば，

$$\varphi_{ji}^{med}(x_0) = r_{ij}^{med}(x_0),$$

とする（φ の添字 i，j の順序に注意）．

$p = (x_0, y_0, z_0)$ を下側エンベロープ上の頂点とし，点 p を (x, y) 平面に射影した点を $p' = (x_0, y_0)$ とする．このとき，点 p を通る 3 つの曲面 $g_i(x, y)$，$g_j(x, y)$，$g_k(x, y)$ が存在して，

$$g_i(x_0, y_0) = g_j(x_0, y_0) = g_k(x_0, y_0) = \min_l g_l(x_0, y_0)$$

が成り立つ．すると，$y_0 = r_{ij}^{min}(x_0)$，$y_0 = r_{ij}^{med}(x_0)$，$y_0 = r_{ij}^{max}(x_0)$，のうち 1 つが，また，$y_0 = r_{ik}^{min}(x_0)$，$y_0 = r_{ik}^{med}(x_0)$，$y_0 = r_{ik}^{max}(x_0)$ のうち 1 つが成り立つ．

例えば，p' で $y_0 = r_{ij}^{max}(x_0)$ と $y_0 = r_{ik}^{max}(x_0)$ が成り立っていたとする．このとき，y を少し大きくした時の $g_i(x_0, y)$，$g_j(x_0, y)$，$g_k(x_0, y)$ の大小関係によって，

$$y_0 = \begin{cases} \varphi_{ij}^{max}(x_0) \\ \varphi_{ji}^{max}(x_0) \end{cases} \qquad y_0 = \begin{cases} \varphi_{ik}^{max}(x_0) \\ \varphi_{ki}^{max}(x_0) \end{cases}$$

の4つの組合せのどれかが成り立っている. $y_0 = \varphi_{ij}^{max}(x_0) = \varphi_{ik}^{max}(x_0)$ となっていたとすると, $y > y_0$ となる y に対して, $g_i(x_0, y) > g_j(x_0, y)$ かつ $g_i(x_0, y) > g_k(x_0, y)$ であるから, $l \neq j, k$ に対して, $g_l(p') > g_i(p') = g_j(p') = g_k(p')$ となるためには, $\varphi_{il}^{max}(x_0) > y_o$ でなければならない. 従って,

$$\varphi_{ij}^{max}(x_0) = \varphi_{ik}^{max}(x_0) = \min_l \varphi_{il}^{max}(x_0)$$

である.

以下, 同様にして, すべての場合について考えると, p' において $y_0 = r_{ij}^{med}(x_0) = r_{ik}^{med}(x_0)$ が成り立つ場合を除けば, 下側エンベロープ上の点 p は,

$$\chi_i^{min}(x) = \min_l \varphi_{il}^{min}(x) \qquad \psi_i^{min}(x) = \min_l \varphi_{li}^{min}(x)$$
$$\chi_i^{max}(x) = \max_l \varphi_{il}^{min}(x) \qquad \psi_i^{max}(x) = \max_l \varphi_{li}^{min}(x)$$
$$\widehat{\chi}_i^{min}(x) = \min_l \varphi_{il}^{max}(x) \qquad \widehat{\psi}_i^{min}(x) = \min_l \varphi_{li}^{max}(x)$$
$$\widehat{\chi}_i^{max}(x) = \max_l \varphi_{il}^{max}(x) \qquad \widehat{\psi}_i^{max}(x) = \max_l \varphi_{li}^{max}(x)$$

という1変数関数の最大値または最小値をとるような $8n$ 個の関数のグラフ上の点に対応している.

p' において $y_0 = r_{ij}^{med}(x_0) = r_{ik}^{med}(x_0)$ が成り立っていたとする. $\omega_i(x)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を次のように定義すると, p' は, これらの関数の交点に対応している.

$$\omega_i(x) = \max_l \{\varphi_{li}^{med}(x) \mid \varphi_{li}^{med}(x) < \varphi_{il'}^{max}\}$$

上で定義した関数の組合せ的複雑度は, 1変数関数の場合の理論から, $O(\lambda_{d^2+2}(n))$ であり, その各区間で $\chi_i^{min}(x)$ らは, 他の関数とは高々 d^2 回しか交わらないから, 新しい交点の数は $O(d^2\lambda_{d^2+2}(n))$ である. 従って, 交点の総数は, $O(n\lambda_{d^2+2}(n))$ である.
□

曲面に関するゾーン定理は, 第2節で述べた超平面の場合を除けば, 他には, ほとんど知られていない. この定理6を用いて, 平面代数曲線のときのように, 代数曲面に対するゾーン定理を導くことが目標である. ここでは, 今まで考えてきた, 2つの曲面の交線の y に関する次数が3であるような曲面の集合 G に対するゾーン定理ではなく, もう少し条件を強めた次のような集合 $\widetilde{G}$ に対するゾーン定理を与える.

$\widetilde{G} = \{\widetilde{g}_1(x, y), \widetilde{g}_2(x, y), \cdots, \widetilde{g}_n(x, y)\}$, 各 $\widetilde{g}_i(x, y)$ は高々 d 次の多項式とし, $z = \widetilde{g}_i(x, y)$ という曲面を考える. G する条件と同様に, 2つの曲面の交線上の点における接平面は異なるとし,

(ã) $i \neq j$ と x_0 に対し, $\widetilde{g}_i(x_0, y) = \widetilde{g}_j(x_0, y)$ は y に関する次数が高々1次とする.

(c̃) $\widetilde{G}$ の任意の4つの関数は共通点を持たない.

と仮定する．代数曲面によってできたアレンジメント $\mathcal{A}(\widetilde{G})$ に新しくもう一つ曲面を加え，この曲面に沿ってアレンジメントを切り開く．このとき，曲面は $z=\widetilde{g}(x,y)$ の形で与えられるので，切り開くことにより，アレジメントは2つの部分に分けられる．そして，曲面の上側にあるアレンジメントの下側の組合せ的複雑度と曲面の下側にあるアレンジメントの上側の組合せ的複雑度の和によって，この新しく付け加えた曲面が横切るセルのファセットの数を評価できる．切り開いたことにより，不連続な曲面ができるが，定理6と同様な手法を用いて，このような不連続な曲面のアレンジメントの下側の組合せ的複雑度を評価し，これが $O(n\lambda_{d^2+2}(n))$ であることがわかる．よって，上のような条件を満たす曲面の集合 $\widetilde{G}$ に対するゾーン定理が得られる．

定理 7 （代数曲面の集合 $\widetilde{G}$ のゾーン定理）　代数曲面のアレンジメント $\mathcal{A}(\widetilde{G})$ に曲面を1つ付け加えたとき，その曲面のゾーンに含まれるファセットの数は，$O(n\lambda_{d^2+2}(n))$ である．　□

5. まとめ

本稿では，平面代数曲線や3次元空間内の代数曲面の特殊な場合のアレンジメントに対して，アレンジメントに含まれる1つのセルの組合せ的複雑度の評価を行い，それをもとにゾーン定理を導いた．曲面のアレンジメントの1つのセルの組合せ複雑度を求める際，下側エンベロープを利用した．[9]では，放物曲面の下側エンベロープを (x,y) 平面に射影したものがVoronoi図になることを使って，Voronoi図の動的変化を下側エンベロープの変化によって見積もるという方法を用いた．このように，いくつかの関数の最小値をとる関数を求めるという問題も，重要な問題であるといえる．

今回扱った，アレンジメントという概念は，計算幾何学のモーションプラニングやグラフィックスの分野での応用を考えるとき，今後ますます重要となり，複雑な対象物のアレンジメントが必要になってくると思われる．それに伴い，一般の曲面のアレンジメントの1つのセルの組合せ的複雑度の評価や，そのようなアレンジメントに対するゾーン定理を導くことが，今後の課題である．

謝辞

本研究の一部は，文部省科学研究費の援助を受けている．

参考文献

[1] P. K. Agarwal, M. Sharir and P. Shor: Sharp Upper and Lower Bounds for the Length of General Davenport-Schinzel Sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A,* Vol.52 (1989), pp.228–274.

[2] M. J. Atallah: Some Dynamic Computational Geometry Problems. *Computers and Mathematics with Applications,* Vol.11 (1985), pp.1171–1181.

[3] B. Chazelle L. Guibas and D. T. Lee: The Power of Geometric Duality. *BIT*, 25 (1985), pp.76–90.

[4] H. Edelsbrunner: *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo, 1987.

[5] H. Edelsbrunner, L. Guibas, J. Pach, R, Pollack, R. Seidel and M. Sharir: Arrangements of Curves in the Plane – Topology, Combinatorics, and Algorithms. *Proceedings of the 15th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science*, 317, 1988, pp.214–229.

[6] H. Edelsbrunner, J. O'Rourke and R. Seidel: Constructing Arrangements of lines and of segments. *SIAM Journal on Computing*, 15 (1986), pp.341–363.

[7] H. Edelsbrunner, J. Pach, J. T. Schwartz and M. Sharir: On the Lower Envelope of Bivariate Functions and its Applications. *Proceedings of the 22th Symposium on Foundations of Computer Science*, 1987, pp.27–37.

[8] L. Guibas, M. Sharir and S. Sifrony: On the General Motion Planning Problem with Two Degrees of Freedom, *Proceedings of the 4th ACM Symposium on Computational Geometry*, 1988, pp.289–298.

[9] 今井桂子：動的な点に対する Voronoi 図について. 「計算アルゴリズムと計算量の基礎理論」京都大学数理解析研究所講究録 695, 1989, pp.225–232.

[10] E. Szemeredi: On a Problem by Davenport and Schinzel, *Acta Arithmetica*, Vol.25 (1974), pp.213–224.